経済物理学

ソニーCSL　高安秀樹

1 はじめに

現在の金融世界の混乱は、熱力学が出来上がる以前の熱に関する混乱と非常に状況が類似している。昔、永久機関を夢見て熱に関する秘密の研究に人生を費やした人が多数いたように、現在、金融に関する研究の多くは、個人、あるいは、私企業の利益を目的として行われるため研究の成果は基本的に公開されていない。ありもしない熱素という仮想的な元素に基づいた熱の理論が長い間広く信じられていたように、経済学では一度も現実には観測されたことがない安定した需要と供給の均衡の存在がアダムスミス以来２００年以上も想定されている。それだけでなく、需給の安定均衡の幻想は、市場の規制をなくし情報を十分にすれば市場が安定化するという信念を今でも生み出しており、その流れで自由化が進められた外国為替の市場は、結果として今では秒単位で24時間激しくレートが変動するようになっている。

このような金融の世界の混乱を打開するためには、金融データを自然現象のデータと同じような科学の目で研究し、成果を公開して基本的なことから議論を組み立て直すことこそが必要である。経済物理学は、このような背景を踏まえ、経済の問題を可能な限り現実のデータに基づいて、統計物理学の視点で解析する新しい研究分野である[1,2]。現在、金融データは全てデジタル化され、コンピュータネットワークによってかなり詳細な高頻度データまで入手できるようになっている。これらのデータの山から物理的に意味のあることを掘り出すこと、そして、それらの発見に意味付けをしていくことが経済物理学の狙いである。

物理的な視点から見ると、バネの釣り合いを考えることは、熱によるゆらぎを無視できるような低温の極限を想定することに対応し、一方、金融工学のように価格変動を完全に確率的なものとみなすことは温度が無限大の極限に対応する。経済物理学では、有限温度で起こる相転移現象などの概念や手法を活用して現実のデータを解析する。

2　市場価格変動の特質

市場価格の変動には、相転移現象における臨界現象と類似した性質があることが知られている。例えば、価格の変動のグラフをある程度のスケールの範囲で時間スケールを変えてプロットしても同じような変動に見えるフラクタル性（図１）、また、価格の変位の分布関数がベキ乗則に従う性質（図２）があることは様々な市場の高頻度データにおいて確認されている。

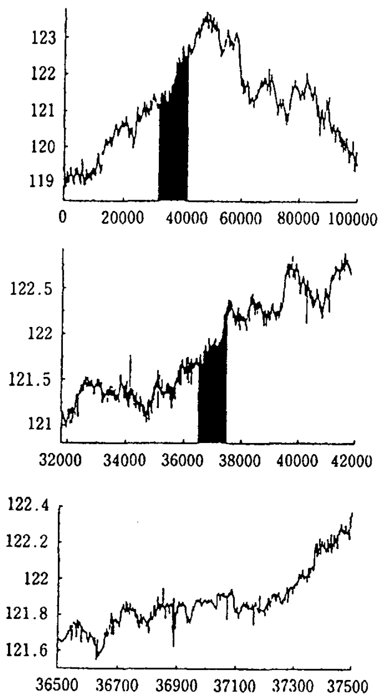

図１　円ドルレートの変動のフラクタル性

上図の黒い部分を10倍に拡大したものが

中段の図、その一部を拡大したものが下段

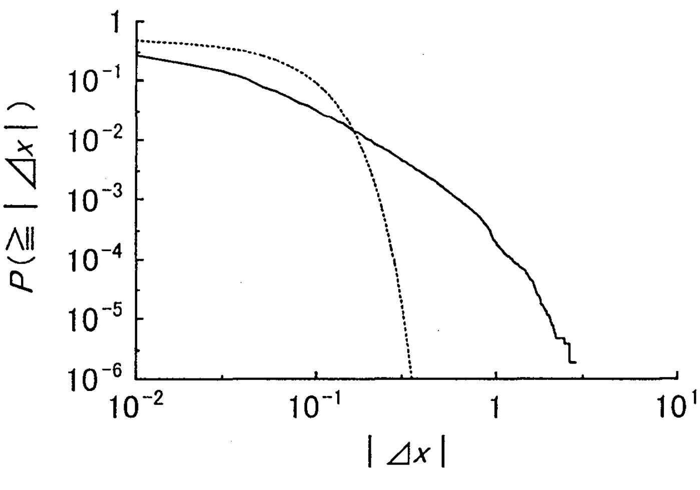

図２　円ドルレートの取引ごとのレートの変位の累積分布の

両対数プロット。点線は同じ平均と分散を持つ正規分布。

実線のプロットは直線でフィッティングし、その傾きから、

指数がおおよそ－1.7程度のベキ分布で近似できることがわかる。

このような需要と供給の関係は、ゆらぎの効果を含まないようなバネの力のモデルでは特徴を捕らえることはできない。その代わりに導入するのが相転移の視点である。市場は、数多くの様々な考え方を持つ人の集団で構成されるが、ひとりひとりを原子のようにみなし、市場全体のマクロな状態として、買い手の数が多い超過需要状態と売り手の数の方が多い超過供給状態のふたつの状態を想定する。そのように考えると、需要と供給の均衡した状態はちょうど相転移点に相当し、通常の物質系の相転移と同じように相転移点では、ゆらぎが最大になり、フラクタル的な性質が観測されることが合理的に期待される[3]。

3　市場価格方程式の導出

市場価格の方程式を導くためには、まず市場を構成するディーラーの行動特性を確認しておく必要がある。通常の消費される商品と株や為替などの金融商品の最も異なる性質は、金融商品の場合には購入者は販売者にもなる点である。一般に売り買いの差額で利益を上げようとするので、安く買って高く売ろうとするが、このようなディーラーの行動は、心に抱く売値と買値を想定し、図3のようなしきい値ダイナミクスによって近似できる。

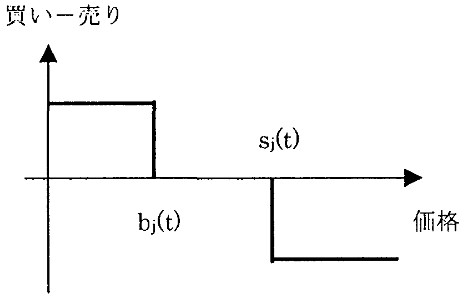

図3　ひとりのディーラーの行動特性

ディーラーによって思惑は異なるので、売値や買値やそれらの重みはひとりひとり異なる。市場全体としては、沢山のディーラーに関してこのような右下がりの階段関数を重ね合わせたものになるので、需要－供給は次のような滑らかな右下がりの関数になる。

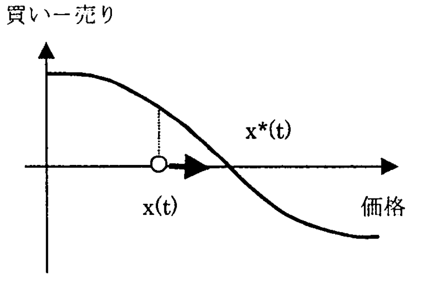

図4　価格の関数としてみた市場の需給差

図４の中で、$x^*(t)$は全てのディーラーが胸のうちにある売買の戦略を表にしたときに決められるような需給がちょうど釣り合う取引価格である。これは、現実には売買注文を発する前のディーラーの売買情報が見えていると仮定して決まる価格なので、実際の市場ではこの値は観測できない。そのために市場での取引価格$x(t)$は、一般には$x^*(t)$とは異なる値をとる。もしも、$x^*(t)$が$x(t)$よりも大きい場合には、現在の市場価格では買いが潜在的に多いことを意味するので、市場価格は上がる傾向があるはずである。逆に、$x^*(t)$が$x(t)$よりも小さい場合には売りが多いので価格は下がる方向に動くはずである。価格が自由に動く市場では、価格の動く幅は売りや買いの量の差に比例するものと期待できるので、市場価格の変化は次のような方程式によって与えられるものと考えられる。

$$x(t+\Delta t)-x(t)=-A(t)(x(t)-x^*(t))+f(t) \qquad (1)$$

ここで、係数$A(t)$は市場価格が仮想均衡に引き寄せられる力の強さを特徴づけるマクロなパラメータの意味を持つ。余分に付加される$f(t)$は、ランダムなゆらぎの効果で、これは、板関数が完全に未来を決めうるわけではないことから必要になる。$A(t)$と図４の関数との関係は自明ではないが、例えば、次のように考えることができる。今、$x(t)>x^*(t)$だとすると、潜在的な売り注文が多い状態であるが、そこにある量の買いが入ったときにどれだけ価格が動くかは、図４の関数$G(x,t)$の勾配の逆数によって与えられると考えられる。すなわち、

$$A(t)=-\left(\frac{\partial<G(x,t)>}{\partial x}\right)^{-1} \qquad (2)$$

ここでの<G>は板関数を滑らかに近似した関数である。経済学では供給の量を変えたときに値段がどれだけ変わるかを特徴づける数値として価格弾力係数という量を導入しているが、ここでのA(t)は、その逆数に相当する。

(3.40) 式は、市場価格が仮想均衡価格によって動かされることを表しているが、仮想均衡価格もまた市場価格の変化によって動かされるはずである。というのは、仮想均衡価格はディーラー達が胸に抱く価格の総意で決まるが、一人一人のディーラーは市場価格の変化を注意深くみており、その変化に応じて自分の売値や買値を変えていくからである。したがって、一般的には、未来の仮想均衡価格、$x^*(t+\Delta t)$は、次のような形で表現されると期待できる。

$$x^*(t+\Delta t)=x^*(t)+f^*(t)+F(\{x(\cdot)\},t) \qquad (3)$$

ここで、$f^*(t)$は予測不可能なディーラーの動きに起因するランダムな外力の効果であり、

$F(\{x(\cdot)\},t)$は、時刻tまでの価格のデータによって決まる関数で、ディーラーが平均的にどのように価格の先読みをしているかの情報がこの中に含まれる。

もしも、ディーラーの先読み方法が皆全く無相関に異なり、市場全体でみると過去の価格の変動に応答するような効果が消えてしまうのであれば、この$F(\{x(\cdot)\},t)$は0になるはずであるが、現実にはそうはなっていないことが確かめられている。$F(\{x(\cdot)\},t)$の中で最も大きな寄与が残ってくるのは、前節の仮想市場モデルの中でも取り入れた効果である一番最近の価格の変位に比例するような動きであると考えられる。この効果を考慮すれば、(3)式は、次のように具体的に書き下すことができる。

$$x^*(t+\Delta t)=x^*(t)+f^*(t)+B(t)\{x(t)-x(t-\Delta t)\} \qquad (4)$$

ここでの係数$B(t)$は市場価格の変化に対するディーラーの応答の強さを表す量であり、ディーラーが”順張り”とよぶ市場価格の変化に追随する傾向の強さを特徴づけるマクロなパラメータである。

方程式(2)と(4)によって$x(t)$と$x^*(t)$に関する閉じた連立方程式が成立し、時間とともに変動する係数である$A(t)$と$B(t)$、ランダムな外力である$f(t)$と$f^*(t)$を与えれば、価格の変動の時間発展がこれらの確率方程式によって記述できることになる。

もしも、$x(t)$と$x^*(t)$が近い値を取りつづけ、$x(t)\fallingdotseq x^*(t)$と近似できるならば、(4)式は、価格差を$\Delta x(t)$とすると、次のようなランジュバン方程式に従うことになる。

$$\Delta x(t+\Delta t)=b(t)\cdot\Delta x(t)+f(t) \qquad (5)$$

ここで、ディーラーの順張りの強さが時間とともにランダムに変動する効果があれば、ランダムに係数が変動するようなタイプのランジュバン方程式に関する次のような基本的な結果が適用できる。(5)式において、

$$<\left|b(t)^{\beta}\right|>=1 \qquad (6)$$

を満たすとき、$0<\beta<2$であれば、分散は発散するが、価格差の変動には統計的な定常状態があり、そのときの分布は下記のようなベキ分布にしたがう[4]。

$$P(>\Delta x)\propto|\Delta x|^{-\beta} \qquad (7)$$

このように、市場価格の変位の分布がベキ乗則にしたがうことは、市場価格の方程式の性質から自然に理解できる。

（5）式の連続極限を考えると、次のような通常のランジュバン方程式になる。

$$\frac{d}{dt}\Delta x = -\nu\Delta x + F(t) \qquad (8)$$

ここで、抵抗値や粘性係数に相当する係数νは、次のようにbと比例する。

$$\nu = (1 - b(t)) / \Delta t \qquad (9)$$

（6）式を満たすためにはbは1よりも大きな値をある確率でとることが必要であるが、（9）式をみればわかるように、これは係数νが負の値をとることを意味する。通常の安定な系ではこのような係数が負になることはないが、相転移の臨界状態では、ゆらぎによってある確率で係数νの値が負になることが起こりえる。すなわち、このように定量的な記述をしたうえでも、価格変動の特性は、臨界現象とみなしうることと整合するのである。

4　今後の展望

経済物理学の研究者の人口は増え続けており、研究テーマにも広がりが出ている[5]。市場価格の予測や暴落制御の研究、市場価格の変動の特性を活用したようなリスクヘッジ方法の開発、バブル・インフレ・デフレのメカニズムの解析、所得の分布や変動の分析、為替のゆらぎを減らすような新しいタイプの電子通貨システムの研究など、興味深い話題がいろいろと発展している。学問として、経済物理学そのものが物理学の枠に入るのか、経済学の枠に入るのか、それとも独自の立場を確立するのか、おそらく今後5年程度の間にはっきりしてくると思われる。

参考文献

[1] 高安秀樹・高安美佐子、2001、エコノフィジックス－市場に潜む物理法則、日本経済新聞社。

[2] R.N.Mantegna and H.E.Stanley, 2000, “An Intorduction to Econophysics-Correlations and Complexity in Finance”, Cambridge Univ. Press:
中嶋眞澄訳、経済物理学入門－ファイナンスにおける相関と複雑性,2000、エコノミスト社。

[3] 高安秀樹・高安美佐子、2000、経済・情報・生命の臨界ゆらぎ、ダイヤモンド社。

[4] Hideki Takayasu, Aki-Hiro Sato and Misako Takayasu, Stable infinite variance fluctuations in randomly amplified Langevin systems, Phys. Rev. Lett., 79(1997), 966-969.

[5] Hideki Takayasu (Editor), 2001, Empirical Science of Financial Fluctuations - The advent of Econophysics, Springer.